*Gregorio Hernández Peñalver*
Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, UPM 

# TEMA 3

# RECURRENCIA. FUNCIONES GENERATRICES

## RELACIONES DE RECURRENCIA

Una relación de recurrencia para una sucesión A=($a_0$ , $a_1$ , $a_2$ ,...., $a_n$ ,...) es una expresión que relaciona $a_n$ con uno o más términos precedentes $a_0$ , $a_1$ , $a_2$ ,...., $a_{n-1}$ , para cualquier n entero mayor o igual que un entero inicial m. Los valores de los primeros términos necesarios para empezar a calcular se llaman **condiciones iniciales**

### RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES Y HOMOGÉNEAS

Si $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m} + g(n)$ $\forall n \geq m$,

donde $c_1$ ,... , $c_m$ son constantes, decimos que la relación de recurrencia es **lineal** y de coeficientes constantes. Si además g(n)=0 diremos que la relación es **homogénea**.

Para simplificar su estudio aquí nos limitaremos a estudiar las relaciones de recurrencia lineales y homogéneas de segundo orden:

(*) $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$

**Ecuación característica**

La ecuación $x^2 = c_1 x + c_2$ se llama ecuación característica de la recurrencia anterior y sus raíces se llaman raíces características.

<u>*Teorema*</u>.

- $\alpha$ es raíz característica $\Leftrightarrow$ $\alpha^n$ es una solución de la relación de recurrencia (*).
- Si $\alpha$ es raíz doble de la ecuación característica entonces $n\alpha^n$ es solución de la relación (*).
- Si T y Z son soluciones de la relación de recurrencia (*) entonces T+Z y kT también lo son.

**Soluciones de la relación de recurrencia** $\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \\ a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 \end{cases}$

1) Si $\alpha$ y $\beta$ son las raíces de la ecuación característica, $\alpha \neq \beta$, entonces la solución general de (*) es
$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n$

2) Si $\alpha$ es raíz doble de la ecuación característica, entonces la solución general de (*) es
$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 n \alpha^n$

Para obtener la solución en las condiciones iniciales $a_0 = b_0$ , $a_1 = b_1$ basta determinar las constantes $k_1$ y $k_2$ con esas condiciones, es decir, $b_0 = k_1 + k_2$ , $b_1 = k_1 \alpha + k_2 \beta$ en el primer caso y $b_0 = k_1 + k_2$ , $b_1 = k_1 \alpha + k_2 n \alpha$ en el segundo

### RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES Y NO HOMOGÉNEAS

Estudiamos las relaciones de la forma $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m} + g(n)$ donde $c_1$ ,... , $c_m$ son constantes, y $g(n) \neq 0$.

A la relación que resulta de eliminar g(n), se decir, $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m}$ se le llama relación lineal homogénea asociada.

**Propiedades**

1. Si T y Z son soluciones de la relación no homogénea, entonces T – Z es solución de la ecuación homogénea asociada.
2. Una solución P=($p_0$,$p_1$, ...,$p_n$, ...) de la ecuación no homogénea se dice que es una solución particular cuando no se tienen en cuenta las condiciones iniciales particulares.
3. ¿Cómo resolver una ecuación no homogénea?
   - Hallar la solución general de la relación homogénea asociada.
   - Hallar una solución particular p(n) de la recurrencia inicial
   - La suma de ambas soluciones es una solución general de la relación no homogénea
   - Obtener la solución específica correspondiente a las condiciones iniciales dadas
4. ¿Cómo obtener una solución particular p(n)?

- Si g(n) es un polinomio de grado k, entonces p(n) es un polinomio de grado mayor o igual a k
- Si $g(n)=kb^n$ es una función exponencial, entonces $p(n)=cb^n$
  (Si b es raíz característica de la homogénea de multiplicidad $\alpha$, se toma $p(n)=cn^{\alpha} b^n$)

***Ejemplo** 1.*
Sea la relación $a_n=a_{n-1} + a_{n-2} +2n$
Una solución particular es p(n)=un+v. Los coeficientes u,v se calculan por el método de los coeficientes indeterminados.
un+v=u(n-1)+v+u(n-2)+v+2n es decir, u=-2, v=-6, y la solución particular es p(n)=-2n-6

***Ejemplo** 2.*
Resolvamos la recurrencia $a_n=a_{n-1} + 6a_{n-2} +2^n$, con las condiciones iniciales $a_0=0$, $a_1=1$
La solución general de la homogénea asociada es $k_1 3^n + k_2(-2)^n$
Tomamos $p(n)=c2^n$, así $c2^n= c2^{n-1} + 6c2^{n-2} +2^n$ , luego c=-1 y la solución particular es $p(n)= - 2^n$
La solución general de la relación no homogénea es $a_n= -2^n +k_1 3^n + k_2(-2)^n$
Las condiciones iniciales implican que $0=-1+k_1+k_2$, $1= -2+3k_1-2k_2$, luego $k_1=1$, $k_2=0$, y la solución de la recurrencia es $a_n = - 2^n + 3^n$

## RELACIONES DEL TIPO *DIVIDE Y VENCERÁS*

Muchos algoritmos recursivos toman un problema y lo dividen en uno o más problemas más pequeños. Esta reducción se aplica sucesivamente hasta que las soluciones de los problemas pequeños pueden obtenerse fácilmente.
Supongamos que un algoritmo descompone un problema de tamaño n en a subproblemas, cada uno de tamaño n/b (supongamos que b divide a n). Además sea g(n) el nº de operaciones que se requieren para descomponer el problema de tamaño n en los problemas más pequeños. Si f(n) es el nº de operaciones requeridas para resolver el problema, entonces f satisface la relación

$$f(n) = a\, f(n/b) +g(n)$$

**Ejemplo 1.**
Si f(n) es el nº de comparaciones requeridas para buscar un elemento en un conjunto ordenado de tamaño n (n par), por medio de una búsqueda binaria, se cumple que $f(n) = f(n/2) + 2$

**Ejemplo 2**.
Se desea hallar el máximo y el mínimo del conjunto $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Se procede así (suponemos que $n=2^k$ por simplicidad):
Si n=1, entonces $a_1=\max(A)=\min(A)$
Si n>1, descomponemos A en dos subconjuntos $A_1$ y $A_2$ del mismo tamaño y resolvemos el problema para $A_1$ y $A_2$. Comparando $\max(A_1)$ y $\max(A_2)$ hallaremos max(A) y análogamente calcularemos mín(A).
Llamando f(n) al nº de comparaciones efectuadas, resulta que $f(n) = 2f(n/2) +2$

**Teorema**
Sea f(n) una función creciente que satisface la relación de recurrencia $f(n)= a\, f(n/b) + c$
donde n es potencia de b, $a\geq 1$, $c\geq 0$. Entonces

$$f(n)=\begin{cases} f(1)+c\log_b n & si\ a=1 \\ C_1 n^{\log_b a}+C_2 & si\ a>1 \end{cases}$$

# FUNCIONES GENERATRICES ORDINARIAS (opcional)

Sabemos que si X es un conjunto de cardinal n, el nº de subconjuntos de tamaño k es $\binom{n}{k}$. Si nos pidieran el nº de subconjuntos de tamaño k para todos los valores de k no negativos, la respuesta sería la sucesión $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ donde $a_k = \binom{n}{k}$. En este caso se dispone de una expresión o fórmula cerrada para A. Desafortunadamente a veces es difícil (o imposible) encontrar una fórmula cerrada para la sucesión A, que representa la solución de un conjunto de problemas combinatorios. Para resolver este problema están las funciones generatrices.

Se llama **función generatriz** (*ordinaria*) de la sucesión $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ a la serie de potencias

$$A(z)= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots$$

La función generatriz de la sucesión del ejemplo anterior es:

$$A(z) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} z + \cdots + \binom{n}{k} z^k + \cdots + \binom{n}{n} z^n$$ siendo nulos los restantes coeficientes.

En este ejemplo conocemos el valor de los coeficientes, que se han calculado de uno en uno, pero ¿cómo se pueden calcular todos de una vez?, es decir, ¿cómo se calcula la función A(z)?

Sea $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto del que elegimos los subconjuntos. Para calcular el nº total de subconjuntos utilizamos el Principio de Multiplicación. En el proceso de recuento consideramos n pasos, siendo las opciones del paso i, incluir el elemento $x_i$ o no incluir dicho elemento en el subconjunto. Así el nº total de subconjuntos es $2^n$. Pero esto no sirve si para detectar los subconjuntos de tamaño k, pues no se tiene en cuenta que las dos opciones tienen diferente contribución al tamaño del subconjunto.
Vamos a distinguir, en el paso i, cuándo se añade un elemento al subconjunto y cuándo no. Representamos la opción de no elegir $x_i$, en el paso i, por $z^0=1$ pues se añade 0 al tamaño del subconjunto, y representamos la opción de seleccionar $x_i$ por $z^1=z$ pues se añade 1 al tamaño del subconjunto. Así la respuesta a cada paso del proceso de recuento puede representarse por la suma de los dos términos, (1+z).
El proceso consta de n pasos independientes y se representa por el producto $(1+z)^n$, un factor por cada paso en el proceso de selección. Si desarrollamos el producto anterior, cada término consta de n factores, uno por cada factor de $(1+z)^n$, siendo los factores o bien un 1 o bien una z. Un 1 añade 0 y una z añade 1 al exponente de z en el término. Por tanto, el tamaño del subconjunto que corresponde a un término es igual al exponente de z en dicho término, y el nº de subconjuntos de tamaño k será el coeficiente de $z^k$.
Con todo esto, la función generatriz de la sucesión A, solución al problema de contar los subconjuntos, es $A(z)= (1+z)^n$
Observamos también que el orden de los pasos no es significativo, pues la decisión de seleccionar el elemento $x_i$ es independiente de la decisión de seleccionar el elemento $x_j$.

La función generatriz correspondiente a muchos procesos de recuento se determina de una forma similar.
Un paso de un proceso de recuento se representa por la función $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots$si, en ese paso, el nº de respuestas que añaden k al tamaño del objeto es $a_k$

**Principio del producto**
Consideremos un proceso secuencial de recuento que consta de m pasos y en el que $A_j(z)$ representa el paso j. Si el orden de los pasos no es significativo, el nº de respuestas de tamaño i es el coeficiente de $z^i$ en el producto $A_1(z)A_2(z)\ldots A_m(z)$

**Principio de adición**
Si el proceso de recuento consta de n casos y se representa la función generatriz del caso j por $B_j(z)$, entonces el nº total de respuestas de tamaño i es el coeficiente de $z^i$ en la suma $B_1(z)+\ldots+B_n(z)$

Las funciones generatrices (*ordinarias*) se utilizan para contar selecciones con repetición limitada, distribuciones de objetos idénticos, soluciones enteras de ecuaciones lineales y particiones, procesos en los que el orden no es importante. Como los exponentes de la función generatriz guardan la traza del tamaño de la respuesta, los sucesos individuales del proceso no necesitan ser independientes en el sentido usual. Ahora es suficiente que cada función generatriz individual sea independiente de la respuesta en los pasos previos. Cuando en el proceso el orden de las respuestas en cada paso sí es importante, se usan funciones generatrices *exponenciales*.

**Ejemplo 1**.
Se tiene una bolsa con 5 canicas amarillas, 4 rojas y 5 blancas. Se eligen 1, 3 ó 5 amarillas, 2, 3 ó 4 rojas y 1, 4 ó 5 blancas, ¿de cuántas formas se pueden elegir 10 canicas?
Función generatriz del primer paso (elección de canicas amarillas) $A_1(z)=z+z^3+z^5$
Función generatriz del 2º paso (canicas rojas) $A_2(z)=z^2+z^3+z^4$
Función generatriz del paso 3 (canicas blancas) $A_3(z)=z+z^4+z^5$
El coeficiente de $z^{10}$ en el producto $A_1A_2A_3$, que es 4, es la respuesta a la pregunta.

**Ejemplo 2**.
Se reparten 25 canicas entre 5 niños, recibiendo cada uno al menos 3 canicas. ¿De cuántas formas se pudo hacer la entrega?
El orden de la distribución no es significativo. Así tenemos 5 pasos, consistiendo el paso i en la entrega de al menos 3 canicas al niño i. La función generatriz del paso i es $z^3+z^4+\ldots+z^{25}$, y la f. generatriz compuesta es $(z^3+z^4+\ldots+z^{25})^5$. El coeficiente de $z^{25}$ en este producto es la respuesta pedida. Este coeficiente es el mismo si lo calculamos en $(z^3+z^4+\ldots+z^{25}+\ldots)^{25}$ y ahí es más fácil de calcular.
(Aunque por los métodos combinatorios sabemos que la respuesta es C(14,4))

**Ejemplo 3**.
¿Cuál es el nº de soluciones enteras de $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$, con las condiciones $a_i \le x_i \le b_i$?
La función generatriz para la elección del tamaño de la variable i es $A_i(z) = z^{a_i} + z^{a_i+1} + \cdots + z^{b_i}$
Así la función generatriz del problema es $A_1(z)A_2(z)\ldots A_n(z)$ y el coeficiente de $z^k$ en este producto es el nº de soluciones buscado.

**Ejemplo 4**.
Función generatriz para el problema de calcular el nº de formas de alcanzar franqueo de n euros con sellos de 2, 3 y 5 euros
Llamemos $a_n$ a dicho nº de formas. Primero elegimos una cierta cantidad de sellos de 2 euros, luego los de 3 euros y, finalmente, los de 5 euros. Como cada sello de 2 euros añade 2 al valor total, la función generatriz de la 1ª elección es $1+z^2+z^4+\ldots$
Análogamente la función generatriz para el 2º paso (elección del nº de sellos de 3 euros) es $1+z^3+z^6+\ldots$, y para el tercer paso (elección del nº de sellos de 5 euros) $1+z^5+z^{10}+\ldots$
La función generatriz de $a_n$ es $(1+z^2+z^4+\ldots)(1+z^3+z^6+\ldots)(1+z^5+z^{10}+\ldots)$
Si nos preguntan por el nº de formas de obtener 20 euros debemos calcular el coeficiente de $z^{20}$ en ese producto. ¿Cómo se calculan los coeficientes?

## MANIPULACIÓN DE FUNCIONES GENERATRICES

Las siguientes fórmulas permiten trabajar con funciones generatrices:

- $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = 1-z^n$, es decir, $\dfrac{1-z^n}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots z^{n-1}$
- $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots) = 1$, es decir, $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots$
- $(1+z)^n = 1+\binom{n}{1}z+\cdots+\binom{n}{n}z^n$
- $(1-z^m)^n = 1-\binom{n}{1}z^m+\binom{n}{2}z^{2m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}z^{nm}$
- $\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^n = (1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots)^n = 1+\binom{1+n-1}{1}z+\binom{2+n-1}{2}z^2+\cdots+\binom{k+n-1}{k}z^k+\cdots$

  que es la función generatriz para el nº de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+x_2+...+x_n=k$ (según se ha visto en el ejemplo 3)

**Ejemplo 5**.
Hallar el nº de elecciones posibles de 30 juguetes de 10 tipos distintos si:

(a) al menos deben elegirse dos de cada clase
(b) se eligen entre 2 y 5 de cada clase

(a) La función generatriz para la elección de cada tipo es $z^2+z^3+\ldots$ Por tanto, la función generatriz del problema es $(z^2+z^3+z^4+\ldots)^{10}$ y se quiere calcular el coeficiente de $z^{30}$
Este es el coeficiente de $z^{30}$ en $z^{20}(1+z+z^2+\ldots)^{10}$, es decir el coeficiente de $z^{10}$ en $(1+z+z^2+\ldots)^{10}$, que es C(19,10)
(b) La función generatriz es $(z^2+z^3+z^4+z^5)^{10}=z^{20}(1+z+z^2+z^3)^{10}=z^{20}((1+z+\ldots)-(z^4+z^5+\ldots))^{10}=$ $=z^{20}((1+z+z^2+\ldots)^{10}(1-z^4)^{10}=z^{20}(1+z+z^2+\ldots)^{10}(1-10z^4+C(10,2)z^8+\ldots)^{10}$
De nuevo buscamos el coeficiente de $z^{30}$ que llamando $w=(1+z+z^2+\ldots)^{10}$ será:
(coef de $z^{10}$ en w ) - 10· (coef de $z^6$ en w) + 45 (coef. de $z^2$ en w) , es decir,
C(19,10) - 10C(15,6) + 45C(11,2)
Resultado al que hemos llegado por manipulación algebraica, sin utilizar el Principio de inclusión-exclusión.

**Ejemplo 6**. El entrenador y los 25 jugadores de un equipo aportan dinero a un fondo común para bebidas obteniéndose en total 20 euros. Sabiendo que cada jugador aportó 0 ó 1 euro, y el entrenador 0, 2 ó 4 euros, ¿de cuántas formas se pudo obtener la cantidad total?

La función generatriz es $(1+z^2+z^4)(1+z)^{25}$ y es pregunta por el coeficiente de $z^{20}$.
Este coeficiente será (coef de $z^{20}$ en$(1+z)^{25}$) + (coef de $z^{18}$ en $(1+z)^{25}$) + (coef de $z^{16}$ en $(1+z)^{25}$) es decir, C(25,20)+C(25,18)+C(25,16)

## RESOLUCIÓN DE RELACIONES DE RECURRENCIA POR FUNCIONES GENERATRICES

Veamos el método con un par de ejemplos:

### Ejemplo 1

Resolver la relación $a_n= a_{n-1} +2a_{n-2}$ con las condiciones iniciales $a_0=1$, $a_1=1$
Sea A(z) la función generatriz de la sucesión $(a_n)$

$$A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n +...$$
$$-zA(z) = \quad -a_0z - a_1z^2 - \ ... -a_{n-1}z^n +...$$
$$-2z^2 A(z) = \quad -2a_0z^2 - ... -2a_{n-2}z^n +...$$

sumando resulta $(1-z-2z^2)\, A(z) = 1$ pues $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$

$$A(z)=\frac{1}{1-z-2z^2}=\frac{1}{(1+z)(1-2z)}=\frac{1/3}{1+z}+\frac{2/3}{1-2z}=\frac{1}{3}(1-z+z^2-\cdots+(-1)^nz^n+\cdots)+\frac{2}{3}(1+2z+\cdots+2^nz^n+\cdots)$$

$a_n$ es el coeficiente de $z^n$, es decir, $a_n=\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n$

### Ejemplo 2

Resolver la relación de recurrencia $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$ con la condición inicial $a_0=1$
Sea A(z) la función generatriz de la sucesión $(a_n)$

$$A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n +...$$
$$-2zA(z) = \quad -2a_0z - 2a_1z^2 - ... -2a_{n-1}z^n +...$$

sumando $(1-2z)\, A(z) = a_0 +(a_1-2a_0)z + (a_2-2a_1)z^2 + ...+ (a_n-2a_{n-1})z^n +...$
como $a_0=1$ y la sucesión $(a_n)$ es solución de la recurrencia, resulta

$$(1-2z)A(z)=1+2z+2z^2+\cdots+2^nz^n+\cdots=\frac{1}{1-2z} \qquad \text{luego} \quad A(z)=\frac{1}{(1-2z)^2}$$

$a_n$ es el coeficiente de $z^n$ en la expresión anterior, es decir, $a_n=\binom{n+2-1}{n}2^n=(n+1)2^n$

En general, si la relación es: $a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + ... + c_m\, a_{n-m} + g(n)$ y llamamos A(z) a la función generatriz de $(a_n)$, se trabaja con el producto $(1-c_1z-c_2z^2- \ldots -c_mz^m)A(z)$, donde, operando algebraicamente, se puede calcular el coeficiente de $z^n$ en A(z), que es justamente $a_n$
La técnica de las funciones generatrices permite obtener una demostración del siguiente teorema sobre existencia de solución para recurrencias lineales y homogéneas.

**Teorema**
Sea la recurrencia lineal homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m}$ , cuya ecuación característica es $q(x) = x^m - c_1x^{m-1} - c_2x^{m-2} - \dots c_{m-1}x - c_m=0$
Si $q(x) = (x - r_1)^{e_1}(x - r_2)^{e_2} \cdots (x - r_k)^{e_k}$, entonces existen los polinomios $p_1$, $p_2$, … $p_k$ con grados (grado de $p_j$) $\le e_j-1$, y tales que $a_n = p_1(n)\, r_1^n + p_2(n)\, r_2^n + \dots + p_k(n)\, r_k^n$

**DIFERENCIAS**
Las diferencias juegan un papel en el campo discreto análogo al del concepto de derivada en el campo continuo

**Sucesión de diferencias**
Sea $A=(a_n)$ una sucesión. Se llama **sucesión de diferencias** asociada a $(a_n)$ a la sucesión $\Delta A = (\Delta a_n)$ definida así: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$
Por ejemplo si A= (0, 1, 4, 9, 16, 25, …), ΔA= (1, 3, 5, 7, 9, …) y si B= (1, 2, 4, 8, 16, …) entonces ΔB=(1, 2, 4, 8, …)
De una forma similar se definen sucesiones de diferencias repetidas
$\Delta^2 A = (\Delta^2 a_n)$ donde $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta(a_{n+1} - a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$
y, de forma recursiva, $\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$ $\forall k\ge 1$
En el ejemplo anterior $\Delta^2 A$ =(2, 2, 2 , …), $\Delta^3 A$ =(0, 0, 0 , …) , $\Delta^k A$ =(0, 0, 0, …) mientras que $\Delta^2 B = B$, $\Delta^k B=B$

**Sucesiones aritméticas**
Una sucesión aritmética $(a_n)$ satisface la ecuación $a_n = a_{n-1} + d$. En este caso $\Delta A$ es constante y $\Delta^2 A = 0$
En general, una sucesión A es una sucesión aritmética de grado k si $\Delta^k A$ es una sucesión constante pero $\Delta^{k-1} A$ no lo es.
La sucesión definida por $a_n = n^2$ es una sucesión aritmética de grado 2, y la sucesión B del ejemplo anterior no es aritmética de ningún grado.

**Teorema**
Una sucesión $A = (a_n)$ es una sucesión aritmética de grado k $\Leftrightarrow$ A está definida por un polinomio de grado k.
En este caso, la expresión (única) de $a_n$ es $a_n = a_0\binom{n}{0} + \Delta a_0\binom{n}{1} + \Delta^2 a_0\binom{n}{2} + \cdots + \Delta^k a_0\binom{n}{k}$
Además, si f(n) es un polinomio de grado k, la sucesión que satisface la recurrencia $a_n = a_{n-1} + f(n)$, $a_0=c$ es un polinomio de grado k+1

**Ejemplo 1**
Consideremos la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2n^2 - n+1$ , $a_0=3$
Las sucesiones de diferencias son:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 5 | 12 | 28 | 57 | 103 | … |
| ΔA | 2 | 7 | 16 | 29 | 46 | | |
| $\Delta^2$A | 5 | 9 | 13 | 17 | | | |
| $\Delta^3$A | 4 | 4 | 4 | | | | |

Por tanto, $a_n = 3\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n + 3$

**Ejemplo 2**
Calcular la suma $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$
Se define la sucesión $a_n = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$. Como $a_n - a_{n-1} = n^4$, se sabe que la sucesión $a_n$ está definida por un polinomio de grado 5, que se obtiene tomando diferencias repetidas

$$a_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}$$

## FUNCIONES GENERATRICES EXPONENCIALES

Estas funciones se utilizan, por ejemplo, para contar permutaciones con repetición limitada o distribuciones de objetos distintos, es decir, sucesiones donde el orden es importante

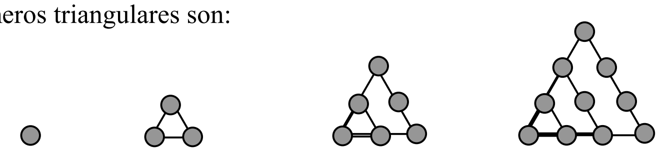
Se llama **función generatriz exponencial** de la sucesión $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ a la serie de potencias

$$E(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2/2! + \ldots + a_k z^k/k! + \ldots$$

**Ejemplo 1**.
Hallar el nº de sucesiones de longitud ocho que pueden formarse usando 1, 2 ó 3 a's; 2, 3 ó 4 b's; y 0, 2 ó 4 c's. (Ahora el orden sí es importante).
La función generatriz exponencial para la elección de a's es $E(z) = z/1! + z^2/2! + z^3/3!$
La función generatriz exponencial para la elección de b's es $E'(z) = z^2/2! + z^3/3! + z^4/4!$
La función generatriz exponencial para la elección de c's es $E(z) = 1 + z^2/2! + z^4/4!$
El nº de sucesiones buscado es el coeficiente de $z^8/8!$ en el producto de las funciones anteriores.

## Ejercicios adicionales de relaciones de recurrencia

1. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia:
   $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$ con $a_0=1$, $a_1=2$
   $a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2n^2$ con $a_0=1$, $a_1=5$
   $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n+1$ con $a_0=2$, $a_1=6$
2. Hallar y resolver una relación de recurrencia para el nº de sucesiones de longitud n que se pueden formar con los dígitos 0, 1 y 2, y que tienen un nº impar de 0's.
3. Demostrar que el número de desarreglos de n elementos cumple la relación de recurrencia $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$
4. Los números triangulares son:



$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$ ......

   Hallar una relación de recurrencia para $T_n$ y resolverla. ¿Cuáles son los números cuadrados? ¿Y los pentagonales?
5. Un disco se divide en n sectores circulares coloreados con 5 colores, de forma que sectores adyacentes tienen diferente color. ¿De cuántas formas diferentes se puede colorear
6. Resolver las siguientes relaciones
   $f(n) = f(n/3)+1$, $f(1)=1$
   $f(n) = 2f(n/3)+4$, $f(1)=1$
   $f(n) = f(n/5) + 3n^2$, $f(1)=4$
7. Algoritmo "divide y vencerás" para ordenar una lista L de n números: Se parte L en dos listas L' y L" de tamaño n/2, se ordenan L' y L" y, finalmente, se mezclan las dos listas ya ordenadas para obtener la ordenación buscada. Si T(n) es el número de comparaciones efectuadas, obtener una relación de recurrencia para T(n) y resolverla.
8. Encontrar una relación de recurrencia tipo "divide y vencerás" para el número de partidos que se deben jugar en un torneo de tenis.
9. Resolver la relación $f(n) = 2f(n/2) + n$
10. Una compañía de alquiler de vehículos dispone de dos oficinas, una en el aeropuerto (oficina A) y otra en el centro de la ciudad (oficina B). Su flota consta de 105 vehículos y se desea conocer cuál es la mejor distribución de los vehículos entre las dos oficinas. Tras estudiar la distribución en los últimos años, se observa que el 25% de los coches alquilados en A son devueltos en A y que el 70% de los alquilados en B son devueltos en B. Plantear el problema en término de relaciones de recurrencia. (Ind. Llamar $x_n$ al nº de vehículos en la oficina B al comienzo del mes n, e $y_n$ al nº de vehículos en la oficina A al comienzo del mes n)
11. Hallar una fórmula para la suma $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$
12. Si A es una sucesión definida por $a_n = n^4 + 3n^2 + 6$, hallar fórmulas para $\Delta A$, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, $\Delta^4 A$
13. Demostrar que cualquier relación de recurrencia para la sucesión $(a_n)$, puede expresarse en términos de $a_n$, $\Delta a_n$, $\Delta^2 a_n$, $\Delta^3 a_n$, ... La ecuación resultante, en la que aparecen la sucesión y sus diferencias repetidas, se llama una **ecuación en diferencias**.